جامعة البعث
كلية العلوم



قسم الرياضيات
السنة الثانية

العام الدراسي : 2017 / 2018

تحليل (٣)

المحاضرة النظرية الرابعة

(٤)

إعداد :

داني محفوض – وهب الحسن

Facebook: Dani Mahfoud
Facebook: Wahab Al-Hasan

سوف نتدرس في هذه المحاضرة اختبارات تقارب السلاسل العددية المختلطة (الكيفية).

* السلسلة العددية المختلطة: هي سلسلة تحوي على حدود موجبة و على حدود سالبة.

أولاً: شرط كوشي لتقارب سلسلة عددية مختلطة:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة عددية كيفية، عندئذٍ تكون هذه السلسلة متقاربة إذا و فقط إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $N(\varepsilon)$ طبيعي يتعلق بالعدد ε بحيث يكون مايلي محققاً:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} ; m > n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

من المفاهيم الهامة في دراسة تقارب السلاسل العددية الكيفية ما يعرف بالتقارب المطلق لهذه السلاسل، و الذي سنصيغ تعريفه على الشكل التالي:

ثانياً: تعريف التقارب المطلق للسلاسل المختلطة:

نقول عن السلسلة العددية المختلطة (ذات حدود متغيرة الإشارة):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

أنها متقاربة مطلقاً إذا كانت سلسلة القيم المطلقة لها متقاربة.

أي إذا كانت السلسلة التالية متقاربة: ←

انتهت المحاضرة الثالثة من الصفحة (41).

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|+\cdots$$

ثالثاً: التقارب الشرطي للسلاسل العددية المختلطة:

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وكانت غير متقاربة مطلقاً، نقول أنها متقاربة شرطياً.

و بعبارة أخرى، نقول أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أنها متقاربة شرطياً، إذا كانت سلسلة القيم المطلقة لها متباعدة، أي إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متباعدة.

مبرهنة: إن كل سلسلة عددية متقاربة مطلقاً تكون متقاربة.

البرهان: لتكن لدينا السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقاً، سنثبت أن هذه السلسلة متقاربة.

من الحقائق المعروفة أن كل عدد حقيقي يكون أصغر أو يساوي قيمته المطلقة، و بالتالي من أجل كل $n\in N$ يكون: $a_n \le |a_n|$، و بالتالي بحسب اختبار المقارنة الأول نستنتج أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، و بذلك يكون قد تم المطلوب.

- ندرس فيما يلي اختبارات تقارب السلاسل العددية المتطالبة.

يمكن استخدام اختبارات تقارب السلاسل الموجبة لدراسة تقارب السلاسل المتناوبة أو المختلطة وذلك بعد أخذ القيم المطلقة لحدودها ، فتصبح سلاسل ذات حدود موجبة ، و لذلك سندرس فيما يلي اختبارات التقارب التي درسناها في المحاضرة السابقة مع إشارة القيم المطلقة .

١) اختبار دالامبير :

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة عددية ما بحيث $a_n \neq 0$ مهما تكن $n \in N$ ، و لنفرض النهاية :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = k$$

عندئذٍ تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقاً إذا كانت $k<1$ وإذا كان $1<k$ تكون السلسلة متباعدة .

2) اختبار الجذر النوني (كوشي) :

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة عددية ما ، و لنفرض وجود النهاية :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k$$

عندئذٍ تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقاً إذا كان $k<1$ و إذا كان $k>1$ تكون السلسلة متباعدة .

3) اختبار رآب :

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سلسلة عددية ما ، و لنفرض وجود النهاية : $\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \left|\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right|\right) = k$

تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقاً إذا كانت $k>1$ ، و تكون متباعدة إذا كان: $k<1$.

4) اختبار ديرخليه : " برهنة "

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سلسلة عددية (ليست بالضرورة أن تكون متقاربة) ، بحيث متتالية مجاميعها الجزئية محدودة ، و لتكن (a_n) متتالية عددية مطردة (متزايدة أو متناقصة) عندئذٍ تكون السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ متقاربة .

برهان الاختبار :

بما أنّ متتالية المجاميع الجزئية (B_n) للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ محدودة فعندئذٍ سيوجد عدد مثل $M>0$ بحيث يكون من أجل كل $n \in N$ لدينا $|B_n| \leq M$ و هذا يعني أنّه من أجل كل n و s من N سيكون لدينا مايلي محققاً :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+s} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{s} b_{n+k}\right| = |B_{n+s} - B_n| \leq |B_{n+s}| + |B_n| \leq 2M$$

و هذا يعني أنّ شرط كوشي لتقارب المتسلسلات محقق من أجل السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ و بالتالي هي متقاربة .

ملاحظة: إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متزايدة تسعى للصفر $(a_n \nearrow 0)$

فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متناقصة تسعى للصفر $(a_n \searrow 0)$.

5) اختبار آبل:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ سلسلة عددية متقاربة ، و لتكن (a_n) متتالية عددية مطردة و محدودة. (وبالتالي متقاربة).

عندئذٍ تكون السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ متقاربة.

نختم هذه المحاضرة بالملاحظة:

نستنتج من نص اختبار آبل أنَّ اختبار (لايبنتز) للسلاسل العددية المتناوبة هو حالة خاصة من اختبار آبل.

و نستنتج من نص اختبار (ديريخليه) أن اختبار (آبل) هو حالة خاصة من اختبار (ديريخليه).

انتهت المحاضرة

writen by : Dani Mahfoud – wahab Al Hasan

مع تمنياتنا بالتوفيق ....